

Von Schrödinger profitieren

Über die Linearität der Quantenmechanik und Atom-Interferometer

Wolfgang P. Schleich

Das Superpositionsprinzip ist ein Eckpfeiler der Quantenmechanik und folgt aus der Linearität der Schrödinger-Gleichung. Damit eng verbunden ist die Beschreibung der klassischen Mechanik durch die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die aber nichtlinear ist. In diesem Artikel motiviere ich aus einer mathematischen Identität [1] eine nichtlineare Wellengleichung für die klassische statistische Mechanik und die lineare Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik.

Die Linearität der Quantenmechanik ermöglicht Materiewellen-Interferometer, die als hochempfindliche Quantensensoren für Rotation und Beschleunigung dienen [2]. Eine Pionierleistung auf diesem Gebiet war die Messung der Phasenverschiebung in einem Neutronen-Interferometer [3, 4] aufgrund der Gravitation. Heute benutzt man dazu kalte Atome, insbesondere Bose-Einstein-Kondensate, die mithilfe von Lichtstrahlen aufgeteilt und wieder zusammengeführt werden. Im Folgenden zeige ich, dass die Phasenverschiebung in einem Kasevich-Chu-Atom-Interferometer [5] von der Nichtvertauschbarkeit [6] zweier Quantendynamiken und insbesondere dem Kommutator zwischen den Operatoren für Ort und Impuls herrührt.

Schon 1927 bemerkte Earle Hesse Kennard [7], dass eine Wellenfunktion in einem linearen Potential eine globale Phase entwickelt, die proportional zur dritten Potenz der Zeit ist. Die erste direkte Messung dieser Kennard-Phase erfolgte in einem Analogsystem der Quantenmechanik, nämlich bei Tiefwasserwellen [8, 9]. Mit diesem Effekt lässt sich auch ein neuartiges Atom-Interferometer mit einer verbesserten Skalierung entwickeln [10]. Während beim Kasevich-Chu-Interferometer die Phasenverschiebung quadratisch in der Zeit ist, die das Atom im Interferometer verbringt, wächst diese in einem Interferometer basierend auf der Kennard-Phase mit der dritten Potenz an. Der experimentelle Nachweis dieser Änderung des Potenzgesetzes gelang mit einem Stern-Gerlach-Interferometer [11, 12].

„Wenn de Broglie recht hat und Materie Wellencharakter besitzt, dann sollte es auch eine Wellengleichung geben. Finden Sie diese!“, forderte Peter Debye 1925 Erwin Schrödinger heraus [13]. Das Resultat war die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (1)$$

für die Wellenfunktion ψ und den Hamilton-Operator \hat{H} .



Abb. 1 Die drei Entdecker der Quanteninterferenz bei Gravitation Albert W. Overhauser, Roberto Colella und Samuel A. Werner (von links) sind hier vor dem Phoenix Memorial Laboratory der University of Michigan in Ann Arbor im Herbst 1974 zu sehen.

Dabei ließ sich Schrödinger von der Hamilton-Jacobi-Formulierung der klassischen Mechanik leiten. Dennoch erriet er das Ergebnis mehr, als dass er es herleitete. Im Zentrum der Schrödinger-Gleichung steht eine mathematische Identität für eine komplexwertige Funktion Z , die von der Zeit t und der Koordinate r abhängt [1]. Diese Relation setzt die Summe aus der ersten Ableitung von Z nach der Zeit und der zweiten Ableitung nach dem Ort in Beziehung zu einer Kombination von Ableitungen der Amplitude A und der Phase θ von Z . Da die Einheiten der beiden Ableitungen unterschiedlich sind, ist eine Konstante β einzuführen, um die Addition zu erlauben:

$$Z = Z(\mathbf{r}, t) \equiv A(\mathbf{r}, t) \exp[i\theta(\mathbf{r}, t)] \quad (2)$$

$$i \frac{\partial Z}{\partial t} + \beta \nabla^2 Z = \left[\left[-\frac{\partial \theta}{\partial t} - \beta (\nabla \theta)^2 + \beta \frac{\nabla^2 A}{A} \right] + i \frac{1}{2A^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} A^2 + 2\beta \nabla \cdot (A^2 \nabla \theta) \right] \right] Z. \quad (3)$$

Der Realteil der rechten Seite von Gl. (3) weist große Ähnlichkeiten mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung auf, während der Imaginärteil die Form einer Kontinuitätsgleichung hat. Dabei spielt das Quadrat von A die Rolle einer Dichte und der Gradient von θ die einer Geschwindigkeit.

Diese mathematische Identität erlaubt es, unterschiedliche Wellengleichungen herzuleiten. Falls die klassische Wirkung und die Hamilton-Jacobi-Gleichung die Phase θ und deren Dynamik definieren, reduziert sich bei geeigneter Wahl von β der Realteil der rechten Seite und bringt

das Potential V ins Spiel. Bei Wahl der Wurzel der Van-Vleck-Determinante D als Amplitude verschwindet auch der Imaginärteil der rechten Seite, da D eine Kontinuitätsgleichung erfüllt [1, 14]. Wegen des letzten Terms im Realteil ist die so entstandene Wellengleichung nichtlinear. Alternativ ist es möglich, diesen Term der Phase zuzuschlagen und damit die Hamilton-Jacobi-Gleichung zu verallgemeinern. Das macht zwar die Bewegungsgleichung für die Phase komplizierter, aber die Wellengleichung linear.

Da im ersten Fall sowohl Amplitude als auch Phase klassischen Gleichungen genügen, entspricht die nichtlineare Wellengleichung der klassischen Mechanik [15]. Im Gegensatz dazu liegt im zweiten Fall durch Einbeziehung des nichtlinearen Terms in die Hamilton-Jacobi-Gleichung die lineare Schrödinger-Gleichung der Quantenmechanik vor.

Neutronen und Atome in Gravitation

Materiewellen-Interferometer nutzen diese Linearität. So beobachteten am 29. März 1975 Roberto Colella, Albert W. Overhauser und Samuel A. Werner (Abb. 1) erstmals die Phasenverschiebung von Neutronenwellen durch das Gravitationsfeld der Erde [3]. Ihr COW-Experiment (Abb. 2) basiert auf der Bragg-Beugung von Neutronen an drei Silizium-Kristallebenen, die zu zwei interferierenden Wegen führt, welche die Punkte A und D entweder über B oder C verbinden. Wird das Interferometer um die Achse AB gedreht, verändert sich die Fläche des Interferometers relativ zur Gravitation und damit die Phasenverschiebung zwischen den zwei interferierenden Neutronenwellen. Daraus resultieren verschiedene Zählraten in den Detektoren C_2 und C_3 .

Etwa 15 Jahre später entwickelten Mark Kasevich und Steven Chu das Analogon des COW-Interferometers für Atome, das KC-Interferometer [5]. Die Streuung der Atome an elektromagnetischen Wellen ersetzt dabei die Beugung der Neutronen an den Kristallebenen (Abb. 3). Ein Atomstrahl, der sich entlang des konstanten Gravitationsfeldes (z -Achse) ausbreitet, wechselwirkt für kurze Zeit mit drei

Lichtfeldern. Bei geeigneter Wahl der Wechselwirkungszeit und der Lichtintensität kann das Atom in eine kohärente Überlagerung aus zwei Zuständen gebracht werden, hier Grundzustand $|g\rangle$ und angeregter Zustand $|e\rangle$. Da sich bei der Absorption der Impuls $\hbar k$ des Photons auf das Atom überträgt, ist der Quantenzustand des Atoms eine kohärente Überlagerung aus $|p\rangle|g\rangle$ und $|p + \hbar k\rangle|e\rangle$ wobei $|p\rangle$ ein Impulseigenzustand ist. Die Wechselwirkung bei T ist so gewählt, dass sie die internen Zustände austauscht. Dabei verringert oder vergrößert sich der Impuls des Atoms je nachdem, ob eine Emission oder eine Absorption vorliegt.

Der Lichtpuls bei $2T$ ist wieder ein Strahlteiler und mischt die beiden Wege. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, Atome in den beiden Ausgängen des Interferometers zu finden, durch die Interferenz der beiden Wege gegeben. Die entsprechende Phasendifferenz beruht auf den unterschiedlichen Reihenfolgen der unitären Zeitentwicklungen. Auf dem oberen Weg ist aufgrund des Impulsübertrags bei $t = 0$ das Atom zunächst im angeregten Zustand und nach $t = T$ wieder im Grundzustand. Auf dem unteren Weg ist dies genau umgekehrt. Somit entspricht der Hamilton-Operator

$$\hat{H}_g \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + mg\hat{z} \tag{4}$$

der Bewegung des Atoms mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld mit der Beschleunigung g im Grundzustand, während der Hamilton-Operator [6]

$$\hat{H}_e \equiv \frac{(\hat{p} + \hbar k)^2}{2m} + mg\hat{z} \tag{5}$$

die Bewegung im angeregten Zustand mit einem um $\hbar k$ erhöhten Impuls beschreibt.

Die entsprechenden unitären Zeitentwicklungen vertauschen nicht, da

$$[\hat{H}_g, \hat{H}_e] = \frac{\hbar k}{m} [\hat{H}_g, \hat{p}]. \tag{6}$$

Nach der Heisenberg'schen Bewegungsgleichung ist der Kommutator auf der rechten Seite gerade die zeitliche

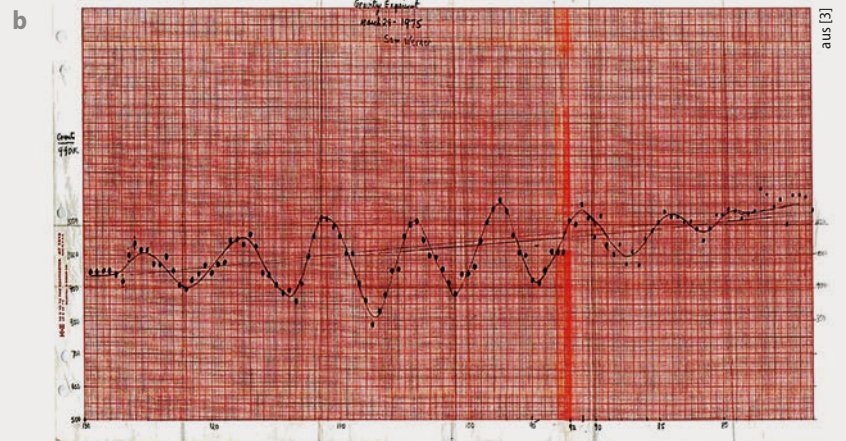
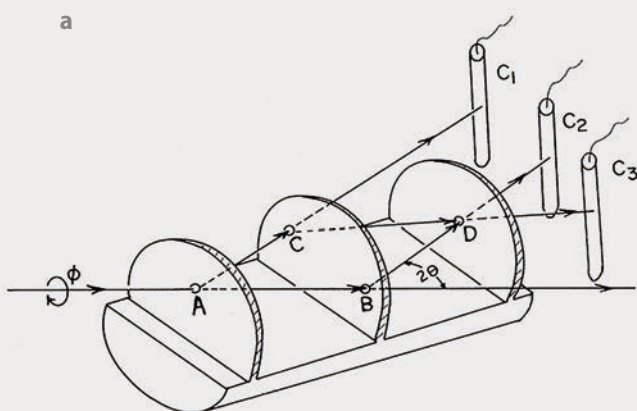
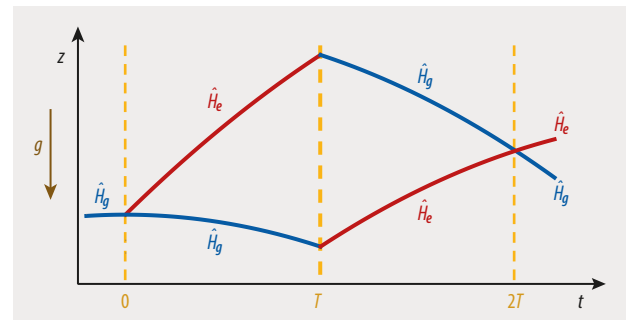


Abb. 2 Im COW-Experiment (a) wird ein Neutronenstrahl kohärent aufgespalten, wieder zusammengeführt und schließlich gemischt. Dreht sich der Kristall im Gravitationsfeld, ändert sich die relative Phase der interferierenden Neutronenwellen, wie die Originaldaten (b) von Samuel A. Werner zeigen.

Abb. 3 Ein Atom mit den internen Zuständen $|g\rangle$ und $|e\rangle$ wechselwirkt bei $t = 0, T, 2T$ mit drei Lichtfeldern. Da die Absorption und Emission des Lichts den Impuls ändern, hängt die Bewegung im Gravitationsfeld der Beschleunigung g , beschrieben durch die Hamilton-Operatoren \hat{H}_g und \hat{H}_e , von den internen Zuständen ab. Auf den beiden Wegen wirken \hat{H}_e und \hat{H}_g in umgekehrter Reihenfolge: Das Kasevich-Chu-Interferometer misst diesen Unterschied.



Änderung des Impulses und somit proportional zur Beschleunigung. Deshalb ist das KC-Interferometer ein Beschleunigungsmesser. Außerdem ergibt Einsetzen von \hat{H}_g aus Gl. (4), dass der Kommutator von \hat{H}_g und \hat{H}_e auf die bekannte Vertauschungsbeziehung von Ort und Impuls führt. Da im Zeitentwicklungsoperator der Hamilton-Operator mit der Zeit multipliziert wird, ist der Kommutator und damit die Phasenverschiebung im KC-Interferometer quadratisch in der Zeit, die das Atom im Interferometer verbringt: je langsamer das Atom, desto größer das Signal.

Diese Skalierungseigenschaft legt nahe, für Präzisionsmessungen kalte Atome zu benutzen. Da Atome wegen ihrer Masse aber die Schwerkraft der Erde spüren, müssen sie entweder durch zusätzliche Felder levitiert werden oder die Experimente müssen in Mikrogravitation stattfinden. Das ist am Bremer Fallturm, in Parabel- oder Raketenflügen bzw. auf der Internationalen Raumstation möglich. Beispiele dafür sind die Missionen QUANTUS [16], MAIUS [17], CAL [18] und BECCAL [19].

Kennard-Phase

Die Phasenverschiebung im KC-Interferometer skaliert mit dem Quadrat von T . Ob es ein Interferometer mit einem höheren Potenzverhalten gibt, lässt sich mit der Kennard-Phase herausfinden [20].

In der Pfadintegral-Formulierung der Quantenmechanik ist die Phase der Wellenfunktion eines Teilchens in einem linearen Potential durch die klassische Wirkung gegeben [21], also dem Integral der Lagrange-Funktion

über die Zeit. Da in diesem Fall sowohl die kinetische als auch die potentielle Energie quadratisch in der Zeit sind, ist die resultierende Phase kubisch. Darüber hinaus hängt die Kennard-Phase nicht vom Ort ab [10]. Als globale Phase galt sie deshalb lange als unbeobachtbar, bis vor kurzem die direkte Messung in Tiefwasserwellen gelang [8]. Deren Amplitude erfüllt im mitbewegten Bezugssystem eine Schrödinger-Gleichung [9]

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}, \tag{7}$$

bei der Zeit und Ort, hier in den dimensionslosen Variablen ξ und τ ausgedrückt, ihre Rollen vertauschen. Deshalb lassen sich bei Wasserwellen im Gegensatz zu Materiewellen beliebige Anfangswellenfunktionen leicht realisieren: Der gewünschte zeitliche Verlauf einer Welle entsteht an einem festen Ort durch eine mechanische Anregung der Wasseroberfläche.

Das Experiment fand in einem 16 Meter langen Wassertank in den Laboren von Lev Shemer an der Tel Aviv University statt (Abb. 4a). An dem einen Ende des Kanals erzeugt die geeignete Bewegung von Paddeln die Wellen, die sich entlang des Tanks ausbreiten. Fühler an verschiedenen Positionen messen die Wellenamplitude als Funktion der Zeit. Am anderen Ende des Tanks dämpft das Auslaufen an einem Strand die Wellen. Diese sind an den Wänden gut sichtbar.

Georgi Gary Rozenman führte die Messungen zur Kennard-Phase durch. Das dazu notwendige lineare Potential in der Schrödinger-Gleichung realisierte er über eine

G.G. Rozenman (a); (b) aus [8]

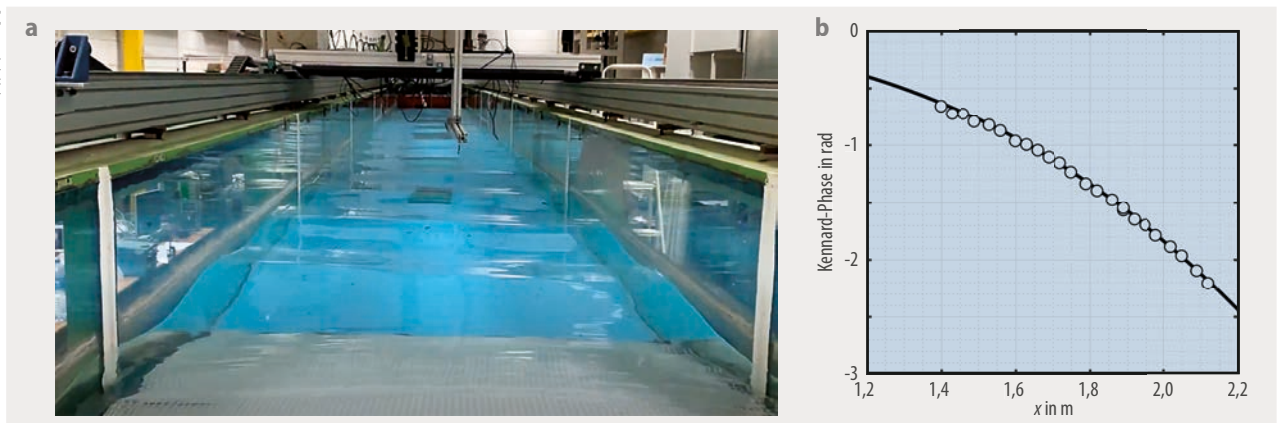


Abb. 4 Mittels Wasserwellen in einem langen Tank (a) lässt sich die Kennard-Phase aufgrund der Analogie von Schrödinger-Gleichung und Tiefwasser-Wellengleichung messen. Die aus der Amplitude extrahierte Kennard-Phase (b) zeigt ihr typisches kubisches Verhalten.

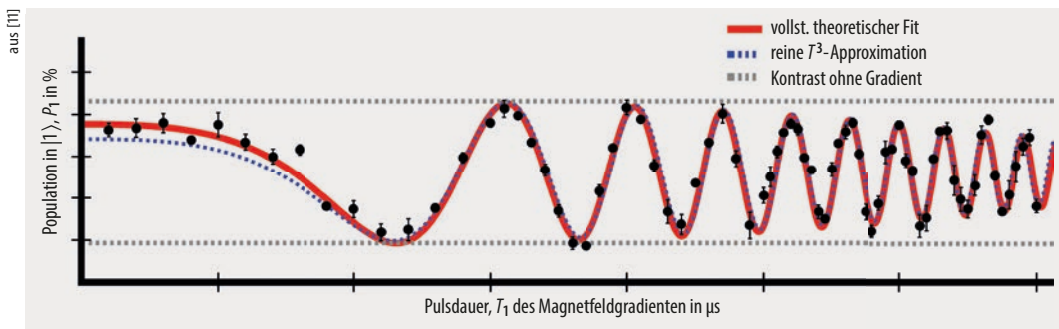


Abb. 5 In einem Stern-Gerlach-Interferometer lässt sich die Phasenverschiebung proportional zu T^3 beobachten.

zusätzliche Strömung mit einer zeitlich linear anwachsenden Geschwindigkeit. Die extrahierte Phase zeigt das von Kennard vorhergesagte kubische Verhalten (**Abb. 4b**). Wegen der Vertauschung von Ort und Zeit in der Wellengleichung der Tiefwasserwellen tritt diese aber jetzt im Ort auf.

Kennard-Interferometer

Um ein Atom-Interferometer mit verbesserter Skalierung zu konstruieren, kommen die Kennard-Phase und der Stern-Gerlach-Effekt zum Einsatz.

Vor fast 100 Jahren haben Otto Stern und Walther Gerlach gezeigt, dass sich ein Atomstrahl in einem inhomogenen Magnetfeld in zwei Strahlen aufteilt, aber nicht, dass diese kohärent sind. Letzteres ist erst vor kurzem der Gruppe von Ron Folman an der Ben-Gurion University of the Negev gelungen. Außerdem realisierte sie zum ersten Mal ein Stern-Gerlach-Interferometer, in dem die beiden Strahlen räumlich voneinander getrennt sind [12]: Atomchips weisen starke Magnetfeldgradienten auf, womit Bose-Einstein-Kondensate manipuliert werden können.

Da die Kennard-Phase auch von dem Quadrat der Beschleunigung abhängt, lässt sie sich interferometrisch beobachten [10], wenn ein Atom auf seinen unterschiedlichen Wegen verschiedene Beschleunigungen erfährt, wie es in einer Überlagerung verschiedener magnetischer Unter-niveaus in einem Magnetfeldgradienten geschieht. Auf diese Weise gelang Ron Folman und seinem Team die erste interferometrische Messung der Kennard-Phase (**Abb. 5**).

Danksagung

Mit dem Ein-Atom-Maser, Wigner-Kristallen in einer Paul-Falle und Resonatoren mit beweglichen Spiegeln schuf Herbert Walther die Grundlagen der heutigen Quantentechnologien und der Optomechanik. Er hat meine wissenschaftliche Laufbahn vom Studium bis zum Hochschullehrer entscheidend geprägt. Deshalb ist es für mich eine besondere Ehre, den Herbert-Walther-Preis zu erhalten.

Auch danke ich allen meinen früheren und jetzigen Mitarbeitern und Kollegen für anregende Diskussionen und Beiträge. S. A. Werner und G. G. Rozenman danke ich für die freundliche Überlassung der Abb. 1, 2 und 4.

Für die großartige Unterstützung durch die Alexander von Humboldt-Stiftung, das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Deutsche Forschungsgemeinschaft, die DLR-Raumfahrtagentur, die Europäische Gemeinschaft, das Hagler Institute for Advanced Study, die Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung, die Baden-Württemberg Stiftung, die Max-Planck-Gesellschaft, das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg und die Universität Ulm bin ich sehr dankbar.

Literatur

- [1] W. P. Schleich et al., Proc. Natl. Acad. Sci. USA **110**, 5374 (2013)
- [2] K. Bongs et al., Nat. Rev. Phys. **1**, 731 (2019)
- [3] R. Colella et al., Phys. Rev. Lett. **34**, 1472 (1975)
- [4] H. Rauch und S. A. Werner, Neutron Interferometry, Oxford University Press, New York (2015)
- [5] M. Kasevich und S. Chu, Phys. Rev. Lett. **67**, 181 (1991)
- [6] W. P. Schleich et al., New. J. Phys. **15**, 013007 (2013) und W. P. Schleich et al., Phys. Rev. Lett. **110**, 010401 (2013)
- [7] E. H. Kennard, Z. Phys. **44**, 326 (1927) und E. H. Kennard, J. Franklin Inst. **207**, 47 (1929)
- [8] G. G. Rozenman et al., Phys. Rev. Lett. **122**, 124302 (2019)
- [9] G. G. Rozenman et al., Fluids **4**, 96 (2019)
- [10] M. Zimmermann et al., Appl. Phys. B **123**, 102 (2017)
- [11] O. Amit et al., Phys. Rev. Lett. **123**, 083601 (2019)
- [12] Y. Margalit et al., Science Advances **7**, eabg2879 (2021)
- [13] F. Bloch, Physics Today **29**(12), 23 (1976)
- [14] W. P. Schleich et al., in: E. M. Rasel, W. P. Schleich, S. Wölk (Hrsg.), Foundations of Quantum Theory (Proceedings of the International School of Physics „Enrico Fermi“ 197), IOS Press, Amsterdam (2019)
- [15] P. R. Holland, The Quantum Theory of Motion, Cambridge University Press, Cambridge (1993)
- [16] T. van Zoest et al., Science **328**, 1540 (2010)
- [17] D. Becker et al., Nature **562**, 391 (2018)
- [18] D. C. Aveline et al., Nature **582**, 193 (2020)
- [19] K. Frye et al., EPJ Quantum Technology **8**, 1 (2021)
- [20] Diesen Hinweis verdanke ich S. A. Werner.
- [21] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948)

Der Autor



Fotostudio Hofstätter / W. Schleich

Wolfgang P. Schleich ist Direktor des Instituts für Quantenphysik an der U Ulm und kommissarischer Direktor des DLR-Instituts für Quantentechnologien in Ulm. Vor seiner Berufung nach Ulm 1991 hat er an den Universitäten von New Mexico (Albuquerque) und Texas (Austin) sowie am MPI für Quantenoptik (Garching) geforscht. Für seine

wissenschaftlichen Leistungen wurde er u. a. mit dem Gottfried Wilhelm Leibniz-Preis, dem Max-Planck-Forschungspreis und dem Willis E. Lamb Award ausgezeichnet. Er ist Mitglied zahlreicher nationaler und internationaler Akademien.

Prof. Dr. Wolfgang P. Schleich, Institut für Quantenphysik und Center for Integrated Quantum Science and Technology (IQST), Universität Ulm, Albert-Einstein-Allee 11, 89081 Ulm; Institut für Quantentechnologien, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Söflinger Straße 100, 89077 Ulm; Hagler Institute for Advanced Study and Department of Physics and Astronomy, Institute for Quantum Science and Engineering (IQSE), Texas A&M AgriLife Research, Texas A&M University, College Station, Texas 77843-4242, USA